**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**

**Universidad del Perú. Decana de América**

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Académico Profesional de Matemática


# Ecuación no lineal de primer orden y de segundo grado

**MONOGRAFÍA**

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática


**AUTOR**

Jackeline Rosa RAMOS JUANCHO

**ASESOR**

Mg. Teodoro SULCA PAREDES



Lima, Perú

2010

**Referencia bibliográfica**

Ramos, J. (2010). *Ecuación no lineal de primer orden y de segundo grado*. Monografía para optar el título de Licenciada en Matemática. Escuela Académico Profesional de Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

## Dedicatoria

A mi querida Madre :

Vicenta Juancho Justo,

por brindarme cada dia.

su apoyo, comprensión y amor

# Agradecimientos

Al Dr Pedro contreras chamorro por dedicarme su tiempo y comprensión para la elaboración, de la presente monografía .

A los profesores, amigos y compañeros de la facultad de ciencias Matematicas que contribuyeron a fortalecer mi formación profesional

Jackeline Rosa Ramos Juancho

# Ecuación no lineal de primer orden y de segundo grado

Jackeline Rosa Ramos Juancho

Monografia presentada a consideración de Cuerpo de Docentes de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobado por:

Mg. Teodoro Sulca Paredes

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro

**LIMA - PERÚ**

**Febrero - 2010**

# RESUMEN
# Ecuación no lineal de primer orden y de segundo grado

Jackeline Rosa Ramos Juancho

Febrero_ 2010

**Asesor: Mg. Teodoro Sulca Paredes**

---

En la presente monografía desarrollaremos una breve introducción de las propiedades de las funciones periódicas y elípticas , para dar paso a la función $\mathcal{P}-$ weierstrass la cual es la solución de la ecuación no lineal de primer orden y de segundo grado , de vital importancia porque es el primer ejemplo no trivial de función elíptica no constante , además ella caracteriza a todas las funciones elípticas,pares,doblemente periodicas, con periodos $w_1$ y $w_2$ en el sentido de que cualquier otra función de este tipo es de la forma :

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(a_j)}{\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(b_j)}, \quad \text{donde } a_j,\, b_j \text{ son números complejos}$$

En el capítulo 2 estudiaremos el Teorema de la Adición de la función $\mathcal{P}-$Weierstrass, la cual es importante ,porque mediante el podemos relacionar los toros complejos analíticos como variedades y las curvas elípticas de weierstrass en un proyectivo complejo.

# ABSTRAC
# Ecuación no lineal de primer orden y de segundo grado

Jackeline Rosa Ramos Juancho

**Febrero_ 2010**

**Advisor :** Mg Teodoro Sulca Paredes

---

In this monograph we develop a brief introduction to the properties of periodic functions and elliptical, to make way for function $\mathcal{P}$- Weierstrass which is the solution of the nonlinear equation of first order and second degree, of vital importance because it is the first nontrivial example of function elliptic non-constant, it also characterizes all elliptic functions, pairs, doubly periodic, with periods $w_1$ and $w_2$ in the sense that any other function of this type is of the form:

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(a_j)}{\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(b_j)}, \quad \text{where } a_j,\ b_j \text{ are complex numbers}$$

In chapter 2 we will study the Addition Theorem of function $\mathcal{P}$- Weierstrass , which is important because through the bulls can relate complex analytic varieties and curves elliptic Weierstrass in a complex project.

# Índice general

# Capítulo 1

# La Función $\mathcal{P}$ - Weierstrass y Las Funciones $\xi$ y $\nabla$

En la presente monografía, tendremos en cuenta, que las funciones con las cuales estamos trabajando son meromorfas.

Diremos que la función $f(z)$ es meromorfa sobre $\mathbb{C}$, si ella es analítica excepto en sus polos.

Denotemos por:

$$\mathbb{P}_f = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ es un polo de } f(z)\}$$

al conjunto de polos de una funcion $f$.

**Ejemplo 1.1** *Consideremos la función*

$$f(z) = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}$$

*entonces* $\mathbb{P}_f = \{i, -i\}$

## 1.1. Funciones Periodicas y Elipticas

### 1.1.1. Funciones Periódicas

**Definición 1.1** *Sea $G \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo, dada la función $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, diremos que $f(z)$ es periódica si y solo si existe $w$ e $\mathbb{C}$ no nulo, tal que*

$$z + w \in G \quad y \quad f(z+w) = f(z) \quad para \quad todo\ z \in G$$

**Observación 1.1**

1. *$w$ es llamado período de $f(z)$*
2. *Cualquier función $f(z)$ tiene a $w = 0$, como período*
3. *$f(z) = z$ tiene a cero como unico punto periódico*
4. *Si $f(z)$ es constante, entonces $f(z)$ tiene como punto periódico a cualquier número complejo.*

**Ejemplo 1.2** *Consideremos $f(z) = e^z$ , entonces $f(z)$ es una función periodica, con período $2\pi i$, en efecto:*

$$\begin{aligned} f(z+2\pi i) &= e^{z+2\pi i} = e^z.e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + isen\ 2\pi) \\ &= e^z = f(z) \end{aligned}$$

**Proposición 1.1** *Sea*

$$P_f = \{w \in \mathbb{C} : w \text{ es un período de } f(z)\}$$

*si*

*(i)* $w \in P_f$ *entonces* $-w \in P_f$

*(ii)* $w_1$,$w_2$, ... ,$w_n \in P_f$ *y* $\lambda_1$, ... , $\lambda_n \in \mathbb{Z}$ *entonces*

$$w_1\lambda_1 + w_2\lambda_2 + \cdots + w_n\lambda_n \in P_f$$

*de (i) y (ii)* $P_f$ *es un* $\mathbb{Z}$*-módulo en* $\mathbb{C}$.

**Demostración**

Ver [1] página 335.

■

**Lema 1.1** *Si $a$ es un polo de $f(z)$ y $w$ es un período de $f(z)$, entonces $a+w$ es un polo de $f(z)$*

**Demostración**

Si $a$ es un polo de $f(z)$, tenemos que

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty \tag{1.1}$$

y si $w$ es un período de $f(z)$ entonces

$$f(z+w) = f(z), \forall z \in \mathbb{C} \tag{1.2}$$

teniendo en cuenta las ecuaciones (1,1) y (1,2) tenemos que

$$\lim_{z\to(a+w)} f(z) = \lim_{t\to a} f(t+w) = \lim_{t\to a} f(t) = \infty,$$

es decir $a+w$ es un polo de $f(z)$.

■

**Ejemplo 1.3** *Consideremos $f(z) = \frac{1}{\cos z}$, la cual es una función periodica de período $2\pi$ y tiene un polo en $\frac{\pi}{2}$ entonces $2\pi + \frac{\pi}{2}$ es un polo de $f(z)$.*

**Lema 1.2** *Si $f(z)$ es una Función Periódica, entonces $f'(z)$ es una Función Periódica.*

**Demostración**

En efecto, desde que $f(z+w) = f(z)$ tenemos que $f'(z+w) = f'(z)$

■

**Ejemplo 1.4** *Consideremos $f(z) = sen(z)$, la cual es una función periodica entonces $f'(z) = \cos(z)$ tambien es una función periodica.*

**Observación 1.2** *Obviamente existen funciones no periodicas como:*

1. $Q(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$
2. $R(z) = \dfrac{T(z)}{Q(z)}$, *donde $T(z)$ y $Q(z)$ son polinomios sin raíces en común.*

**Lema 1.3** *Sea $f(z)$ una función meromorfa definida en $\mathbb{C}$ y no constante, entonces:*

$$\text{ínf}\{|w| : w \in P_f\} > 0$$

**Demostración**

Supongamos que la desigualdad no es estricta, entonces existen una sucesión $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset P_f$ tal que $w_n \to 0$. Por otro lado, sea $z_0$ un punto regular cualquiera de $f(z)$, entonces tenemos que $f(z_0 + w_n) = f(z_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si definimos $g(z) = f(z) - f(z_0)$, entonces $g(z)$ tiene infinitos ceros $(z_0 - w_n)$, luego $g(z)$ es identicamente nulo, es decir $f(z) = f(z_0)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, lo cual contradice nuestra hipotesis.

■

**Teorema 1.1** *Si $f$ es una función no identicamente nula, no constante, periódica y meromorfa, entonces $P_f$ es discreto.*

**Demostración**

Supongamos que existe un punto de acumulación, digamos $w_0 \in P_f$, entonces podemos hallar una sucesión de puntos diferentes $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset P_f$ tal que $w_n \to w_0 \neq 0$ (por el lema 1.3).

Desde que

$$f(z + w_0) = \lim_{n\to\infty} f(z + w_n) = f(z) \ , \ \text{para todo } z \in \mathbb{C},$$

es decir $w_0$ también es un punto periódico de $f(z)$, luego $0 \neq w_n - w_0$ son también puntos periódicos para todo $n \in \mathbb{N}$ y $w_n - w_0 \to 0$, lo cual contradice el lema 1.3

■

**Teorema 1.2** *Sea $A$ un $\mathbb{Z}$-módulo discreto en $\mathbb{C}$, entonces:*

1. $A = \{0\}$ *ó*
2. $A = \{\lambda_1 w_1 : \lambda_1 \in \mathbb{Z}\}$ *ó*
3. $A = \left\{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}; \left\{\dfrac{w_1}{w_2}\right\} \notin \mathbb{R}\right\}$

**Demostración**

Ver [3] página 666.

■

**Corolario 1.1** *Sea $f(z)$ una función meromorfa periódica en $\mathbb{C}$, entonces:*

1. $P_f = \{0\}$ *ó*
2. $P_f = \{\lambda_1 w_1 : \lambda_1 \in \mathbb{Z}\}$ *ó*
3. $P_f = \left\{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 : \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{Z}; \left\{\dfrac{w_1}{w_2}\right\} \notin \mathbb{R}\right\}$

**Demostración:**

En efecto, $P_f$ es un $\mathbb{Z}-$módulo en $\mathbb{C}$.

Por el teorema 1.1 $P_f$ es discreto, luego $P_f$ se puede expresar de la forma anterior, por el teorema 1.2.

■

Como consecuencia directa tenemos que:

**Teorema 1.3** ***Jacobi 1835*** **-** *La únicas funciones meromorfas con tres periódos no colineales, son constantes.*

### 1.1.2. Funciones Elípticas

**Definición 1.2** *Una función $f(z)$ es eliptica si*

1. *$f(z)$ es doblemente periódica, es decir si tiene dos periódos $w_1$, $w_2$ tal que*

$$\left\{\frac{w_1}{w_2}\right\} \notin \mathbb{R}$$

2. *$f(z)$ es una función meromorfa.*

**Observación 1.3** *$w_1$, $w_2$ son periódos fundamentales si:*

$$w \in P_f \quad \textit{entonces existen } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z} \quad \textit{tal que} \quad w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2.$$

**Definición 1.3** *Diremos que dos puntos del plano $z_1$, $z_2$ son congruentes (respecto a los periódos $w_1$, $w_2$) si $z_1 - z_2 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ para algunos $\lambda_1$, $\lambda_2 \in \mathbb{Z}$.*

**Lema 1.4** *Si $f$ y $g$ son funciones elipticas con periódos $w_1$ y $w_2$ entonces $f+g$, $f-g$, $fg$, $\dfrac{f}{g}$, $g$ función no nula; son funciones elipticas con periódos $w_1$ y $w_2$.*

**Demostración:** Veamos que $f+g$ es una función eliptica como $f$ y $g$ son funciones elipticas con períodos $w_1$ y $w_2$, tenemos que:

$$\begin{aligned}(f+g)(z+w_j) &= f(z+w_j)+g(z+w_j)\\ &= f(z)+g(z)\\ &= (f+g)(z) \qquad \text{para } j=1,2.\end{aligned}$$

De manera similar se demuestra $f-g$, $fg$, $\dfrac{f}{g}$, son funciones elipticas.

■

**Definición 1.4** *Un paralelogramo fundamental asociado a* $\{w_1, w_2\}$ *de vertice* $z_0$ *tal que* $\left\{\dfrac{w_1}{w_2}\right\} \notin \mathbb{R}$ *es de la forma*

$$\Diamond = \{z_0 + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 : 0 \leq \lambda_1 \leq 1 \ ; \ 0 \leq \lambda_2 \leq 1\}$$

**Lema 1.5** *Para cada punto* $z$ *del plano, en el paralelogramo* $\Diamond$ *siempre hay un punto* $z^*$*, y solo uno que es congruente con* $z$.

**Demostración**

Ver [2]; página 238.

■

**Ejemplo 1.5** *Sea la función*

$$f(z) = \frac{3}{z-i} + \frac{2}{z+4} - \frac{4}{z+2i} - \frac{1}{z-6} + e^{z^2}$$

*la suma de los residuos de* $f(z)$ *respecto a los polos* $i$, $-4-2i$ *y* $6$ *es igual a* $3+2-4-1=0$.

**Teorema 1.4** *La suma de los residuos de una función eliptica* $f(z)$*, respecto de todos los polos situados en el paralelogramo fundamental de períodos es igual a cero.*

**Demostración**

Ver [1]; página 148.

■

**Teorema 1.5** *En el paralelogramo fundamental de periódos, el número de ceros de un función eliptica es igual al número de polos (contados con sus multiplicidades)*

**Demostración:** Sea $f$ una función eliptica donde $Z_f$ es el número de ceros de $f$ y $\mathbb{P}_f$ es el número de polo de $f$ tenemos que:

$$Z_f - \mathbb{P}_f = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha'} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

$$\alpha' = [z_0, z_0 + w_1] \cup [z_0 + w_1, z_0 + w_1 + w_2] \cup [z_0 + w_1 + w_2,\ z_0 + w_2] \cup [z_0 + w_2,\ z_0]$$

Definamos:

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

entonces por el lema 1.2 y Lema 1.4 $g(z)$ es eliptica, por lo cual la suma de los residuos de $g(z)$ respecto a los polos es igual a cero por el teorema 1.4.

$$Z_f - \mathbb{P}_f = 0 \qquad \text{entonces} \qquad Z_f = \mathbb{P}_f.$$

■

**Lema 1.6** *Una función eliptica, sin polos en el paralelogramo fundamental de períodos, es constante.*

**Demostración:**.

Sea $f(z)$ una función sin polos entonces $f(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$ por lo cual $f(z)$ es continua.

Como el paralelogramo cerrado $\overline{\Diamond}$ es compacto entonces $f$ es acotado en $\overline{\Diamond}$.

$$\exists\ \ M > 0\ /\ \ |f(z)| < M\ ,\ \ \forall z \in \overline{\Diamond}$$

veamos que

$$\exists \ \ M_1 > 0 \ / \ \ |f(z)| < M_1 \ , \ \ \forall z \in \mathbb{C}$$

En efecto, sea $z \in \mathbb{C}$ por el lema 1.5 $\exists \ z_1 \in \lozenge \ / \ z$ es congruente con $z_1$ y además $f(z) = f(z_1)$ como $z_1 \in \lozenge$ entonces $\exists \ M > 0 \ / \ |f(z_1)| < M$ por lo cual $|f(z)| < M$.

Luego $f(z)$ es una función entera, acotada por el lema de Liouville se tiene que $f(z)$ es constante.

■

**Lema 1.7** *Una función eliptica, sin ceros en el paralelogramo fundamental de periódos es constante.*

**Demostración**.

Sea $f$ una función eliptica, por el lema 1.4 $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ es una función eliptica, sin polos en el paralelogramo fundamental de periódos, por el lema 1.6 se tiene que $g(z)$ es constante, luego $f(z)$ es una función constante.

**Definición 1.5** *El número de Polos de una función eliptica $f(z)$ en $\lozenge$ contado cada polo un número de veces igual a su multiplicidad es llamado orden de $f(z)$*

**Lema 1.8** *El orden de una función eliptica $f(z)$ diferente de la constante no es menor que dos.*

**Demostración**

Supongamos que $f$ posee en el paralelogramo fundamental de períodos un solo polo igual a $\alpha$ (simple), entonces la parte principal del desarrollo de *Laurent* de la función $f(z)$ entorno $z = \alpha$ tiene la forma $\dfrac{A}{Z - \alpha}$ por lo cual $\underset{z=\alpha}{Res} f(z) = A$ por el teorema 1.4 tenemos $\underset{z=\alpha}{Res} f(z) = 0$ por lo tanto $A = 0$.

Esto quiere decir que $f(z)$ es una función eliptica sin polos, por el Lema 1.6 tenemos $f(z)$ es una constante.

Lo cual contradice nuestra hipotesis.

■

## 1.2. Funciones Elipticas de Weiertrass

Consideremos

$$\wedge = \left\{ \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}, \left\{ \frac{w_1}{w_2} \right\} \notin \mathbb{R} \right\}$$

el simbolo $'$ sobre la suma, denota que no se incluye le valor de $w = 0$

**Lema 1.9** *La serie* $\sum\limits_{w \in \wedge}^{\prime} \frac{1}{|w|^{\lambda}}$ *es convergente si* $\lambda > 2$ *y diverge si* $\lambda \leq 2$.

**Demostración**

Ver [1] página 155.

■

**Lema 1.10** *La serie* $f(z) = \sum\limits_{w \in \wedge}^{\prime} \frac{1}{(z-w)^3}$, *es una función eliptica, impar de orden tres, con períodos fundamentales* $w_1$, $w_2$.

**Demostración**

Ver [1] página 156.

■

**La función $\mathcal{P}$ - Weierstrass**

**Definición 1.6** *La Función $\mathcal{P}$ - Weierstrass esta definida por:*

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \wedge}^{\prime} \left[ \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

**Teorema 1.6** *La serie*

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \wedge}^{\prime} \left[ \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

*es una función meromorfa, eliptica, par, de orden dos, con periódos fundamentales* $w_1$ *y* $w_2$.

**Demostración**

1. La función $\mathcal{P}(z)$ es una función meromorfa.

   En efecto.

   Sea $R > 0$, y $B[0, R] = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ entonces

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{|w|\leq 2R}{}^{'} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right] + \sum_{|w|>2R}{}^{'} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right]$$

   sea

$$\begin{aligned} M(z) &= \sum_{|w|\leq 2R}{}^{'} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right] \\ N(z) &= \sum_{|w|>2R}{}^{'} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right] \end{aligned}$$

   Afirmación: $N(z)$ es absolutamente y uniformemente convergente en la $B[0, R]$, en efecto

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right| &= \left|\frac{z(2w-z)}{w^2(z-w)^2}\right| \\ &\leq \frac{2|w|\left(1+\frac{|z|}{2|w|}\right)|z|}{|w|^4\left(1-\frac{|z|}{|w|}\right)^2} \\ &< \frac{10|z|}{|w|^3} \\ &< \frac{10R}{|w|^3} \end{aligned}$$

   como $\sum\limits_{w\in\wedge}{}^{'} \frac{1}{|w|^3}$ es convergente (lema 1.9) entonces

$$\sum_{|w|>2R}{}^{'} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right]$$

es absoluta y uniformente convergente en $B\left[0,R\right]$, por lo cual $N\left(z\right)$ representa una función holomorfa en $B\left[0,R\right]$, se sabe además que $M\left(z\right)$ es una función racional que tiene un polo de orden 2, en cada periódo perteneciente a $B\left[0,R\right]$, por lo tanto $\mathcal{P}\left(z\right)$ es meromorfa en la $B\left[0,R\right]$.

2. La función $\mathcal{P}\left(z\right)$ es par.

   En efecto

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\left(-z\right) &= \frac{1}{\left(-z\right)^2}+\sum_{w\in\wedge}{}' \left[\frac{1}{(-z-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right] \\
&= \frac{1}{z^2}+\sum_{w\in\wedge}{}' \left[\frac{1}{(z+w)^2}-\frac{1}{w^2}\right] \\
&= \frac{1}{z^2}+\sum_{w\in\wedge}{}' \left[\frac{1}{(z-(-w))^2}-\frac{1}{w^2}\right] \\
&= \frac{1}{z^2}+\sum_{w\in-\wedge}{}' \left[\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right] \\
&= \mathcal{P}\left(z\right)
\end{aligned}$$

desde que $\wedge = -\wedge$ la serie

$$\frac{1}{z^2}+\sum_{w\in-\wedge}{}' \left[\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right],$$

se diferencia de la serie

$$\frac{1}{z^2}+\sum_{w\in\wedge}{}' \left[\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right]$$

solamente en el orden de sus términos debido a que

$$\frac{1}{z^2}+\sum_{w\in\wedge}{}' \left[\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right]$$

es absolutamente convergente, cualquier reordenamiento de la serie convergen al mismo valor.

3. $w_1$ y $w_2$ son periódos de $\mathcal{P}$.

   En efecto. Derivando $\mathcal{P}(z)$, debido a que

$$\sum_{|w|>2R}' \left[ \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

   es uniformente convergente tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'(z) &= \frac{-2}{z^3} - \sum_{w\in\wedge}' \frac{2}{(z-w)^3} \\ &= -2\sum_{w\in\wedge}' \frac{1}{(z-w)^3} \\ &= -2f(z) \end{aligned}$$

   y debido al lema 1.10, la $\mathcal{P}'(z)$ es una función eliptica, impar de orden tres y periódos fundamentales $w_1$ y $w_2$ entonces

$$\mathcal{P}'(z+w_j) = \mathcal{P}'(z), \text{ para } j = 1, 2$$

   integrando

$$\mathcal{P}(z+w_j) = \mathcal{P}(z) + C \tag{1.3}$$

   tomando $z = -\dfrac{w_2}{2}$, reemplazando en la ecuación (1.3) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\left(-\frac{w_2}{2} + w_2\right) &= \mathcal{P}\left(-\frac{w_2}{2}\right) + C \\ \mathcal{P}\left(\frac{w_2}{2}\right) &= \mathcal{P}\left(\frac{w_2}{2}\right) + C \end{aligned}$$

   lo cual implica que $C = 0$.

Reemplazando en la ecuación (1.3)

$$\mathcal{P}(z+w_j)=\mathcal{P}(z)$$

4. $w_1$ y $w_2$ son periódo fundamentales.

   **Afirmación** $P_{\mathcal{P}} \subset \wedge$

   En efecto sea $w \in P_{\mathcal{P}}$ y sea $x \in \wedge = \mathbb{P}_{\mathcal{P}}$, entonces $x+w \in \mathbb{P}_{\mathcal{P}}$, como la $\wedge = \mathbb{P}_{\mathcal{P}}$ entonces $x+w \in \wedge$.

   Luego $w = x+w-x \in \wedge$

5. $\mathcal{P}(z)$ es una función eliptica de segundo orden.

   En efecto, tenemos que $\mathcal{P}(z)$ es una función periódica donde sus periódos fundamentales son $w_1$, $w_2$ y cada vértice del paralelogramo fundamental $\{0, w_1, w_2, w_1+w_2\}$ es un polo de segundo orden observemos que de estos cuatro polos solamente el polo igual a cero se incluye al paralelogramo fundamental, los otros tres pertenecen a paralelogramos adyancentes.

**Lema 1.11** *La serie de Laurent de $\mathcal{P}(z)$ , entorno del origen es:*

$$\mathcal{P}(z)=\frac{1}{z^2}+C_2z^2+C_4z^4+\cdots+C_{2m}z^{2m}+\cdots$$

*donde* $\quad C_{2m}=(2m+1)\sum\limits_{w\in\wedge}{}' \frac{1}{w^{2m+2}}.$

**Demostración**

Ver [1]; página 168.

∎

**Observación 1.4** *Como* $\mathcal{P}(z)=\dfrac{1}{z^2}+C_2z^2+C_4z^4+\cdots+C_{2m}z^{2m}+\cdots$ *es holomorfa entorno al origen y es derivable*

$$\mathcal{P}'(z)==\frac{-2}{z^3}+2C_2z+4C_4z^3+6C_6z^5+\cdots+2mC_{2m}z^{2m-1}+\cdots$$

## 1.3. La Ecuación No Lineal de Primer Orden y de Segundo Grado

Consideremos la ecuación

$$[\mathbf{x}']^2 = 4\mathbf{x}^3 - g_2\mathbf{x} - g_3 \tag{1.4}$$

la cual fue generada debido a un problema físico, teniendo como solución a la función $\mathcal{P}-$Weierstrass.

**Teorema 1.7** *La función $\mathcal{P}(z)$ satisface la ecuación diferencial de primer orden y no lineal (1.4)*

$$\begin{aligned} g_2(w) &= 60{\sum_{w\in\wedge}}' \frac{1}{w^4} \\ g_3(w) &= 140{\sum_{w\in\wedge}}' \frac{1}{w^6} \end{aligned}$$

**Demostración:**

$$\mathcal{P}'(z) = \frac{-2}{z^3} + 2C_2z + 4C_4z^3 + 6C_6z^5 + \cdots + (2m)\,c_{2m}z^{2m-1} + \cdots \tag{1.5}$$

Sea

$$b_0 = -\frac{2}{z^3}; \quad b_1 = 2c_2z; \quad b_2 = 4c_4z^3; \quad b_3 = 6c_6z^5$$

Realizando el producto de Cauchy de $\mathcal{P}'(z)$

$$\begin{aligned}
a_0 &= b_0 b_0 = \left(\frac{-2}{z^3}\right)\left(\frac{-2}{z^3}\right) = \frac{4}{z^6} \\
a_1 &= b_0 b_1 + b_1 b_0 = 2b_0 b_1 = 2\left(\frac{-2}{z^3}\right)(2c_2 z) \\
&= -\frac{8}{z^2} c_2 \\
a_2 &= b_0 b_2 + b_1 b_1 + b_2 b_0 = 2b_0 b_2 + b_1^2 \\
&= 2\left(-\frac{2}{z^4}\right)\left(4c_4 z^3\right) + (2c_2 z)^2 \\
&= -16c_4 + 4c_2^2 z^2 \\
a_3 &= -24c_6 z^2 + 16c_2 c_4 z^3
\end{aligned}$$

La serie dada en la (1.5) converge absolutamente, entonces el producto de Cauchy converge absolutamente

$$\left(\mathcal{P}'(z)\right)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{8}{z^2} c_2 - 16c_4 + 4c_2^2 z^2 - 24c_6 z^2 + 16c_2 c_4 z^3 + \cdots \tag{1.6}$$

de forma similar se obtiene $\left(\mathcal{P}(z)\right)^3$.

$$\left[\mathcal{P}(z)\right]^3 = \frac{1}{z^6} - 3\frac{1}{z^2} c_2 - 3c_4 + \cdots \tag{1.7}$$

de (1.6) y (1.7) tenemos que

$$\left[\mathcal{P}'(z)\right]^2 - 4\left[\mathcal{P}(z)\right]^3 = -\frac{20c_2}{z^2} - 28c_4 + H(z)$$

donde

$$H(z) = z_2 \sum dc_j c_i, \qquad d \in \mathbb{Z}.$$

$$
\begin{aligned}
\left[\mathcal{P}'(z)\right]^2 - 4\left[\mathcal{P}(z)\right]^3 + 20c_2\mathcal{P}(z) + 28c_4 &= 20c_2\mathcal{P}(z) - \frac{20c_2}{z^2} + H(z) \\
\left[\mathcal{P}'(z)\right]^2 - 4\left[\mathcal{P}(z)\right]^3 + 20c_2\mathcal{P}(z) + 28c_4 &= 20c_2\left[\mathcal{P}(z) - \frac{1}{z^2}\right] + H(z)
\end{aligned}
$$

Sean:

$$
\begin{aligned}
M(z) &= 20c_2\left[\mathcal{P}(z) - \frac{1}{z^2}\right] + H(z) \qquad \text{y} \\
R(z) &= \mathcal{P}(z) - \frac{1}{z^2} = c_2z^2 + c_4z^4 + c_6z^6 + \cdots
\end{aligned}
$$

luego

$$
M(z) = 20c_3R(z) + H(z)
$$

Como $R(0) = 0$, tenemos que $M(0) = 0$ y $M$ es holomorfa en $0 \leq |z| < r$.

Afirmación

1. $M$ es holomorfa en $\mathbb{C}$

   En efecto, supongamos que $M(z)$ no es holomorfa en $\mathbb{C}$ y sea $z_0 \in \mathbb{C}$ un polo de $M$

   - Si $z_0 = 0$

     Como $z_0$ es un polo de $M$, entonces

     $$
     \lim_{z \to z_0} M(z) = \infty
     $$

     por otro lado, desde que $M$ es continua y $M(0) = 0$, tenemos que

     $$
     \lim_{z \to z_0} M(z) = 0
     $$

     lo cual es una contradicción.

   - Si $z_0 \neq 0$

     Observemos que $\mathcal{P}(z)$ tiene como único polo a cero (en el paralelogramo fundamental), luego desde que $z_0$ es un polo, tenemos que $z_0 = 0$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $M$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}$.

2. $M$ es una función eliptica

   En efecto $\mathcal{P}'(z)$ es una función eliptica, entonces por el lema 1.4 $(\mathcal{P}'(z))^2$ y $(\mathcal{P}(z))^3$ son funciones elipticas y por el mismo argumento

$$M(z) = (\mathcal{P}'(z))^2 - 4(\mathcal{P}(z))^3 + 20c_2\mathcal{P}(z) + 28c_4$$

   es eliptica.

   Luego tenemos que $M$ es una funcion eliptica y holomorfa en $\mathbb{C}$, por lo cual

$$M(z) = k \quad \text{para todo } k \in \mathbb{C}, \; k : \text{constante}$$

   Como $M(0) = 0$, tenemos que $M(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$

$$0 = M(z) = (\mathcal{P}'(z))^2 - 4(\mathcal{P}(z))^3 + 20c_2\mathcal{P}(z) + 28c_4$$

   es decir

$$(\mathcal{P}'(z))^2 = 4(\mathcal{P}(z))^3 - 20c_2\mathcal{P}(z) - 28c_4$$

   teniendo en cuenta el lema 1.11

$$\begin{aligned} 20c_2 &= g_2 \text{ entonces } g_2 = 20(3)\sum_{w\in\wedge}{}' \frac{1}{w^4} = 60\sum_{w\in\wedge}{}' \frac{1}{w^4} \\ 28c_2 &= g_3 \text{ entonces } g_3 = 28(5)\sum_{w\in\wedge}{}' \frac{1}{w^6} = 140\sum_{w\in\wedge}{}' \frac{1}{w^6} \end{aligned}$$

**Observación 1.5** $\mathcal{P}(z)$ *satisface la ecuación (1.4) entonces*

$$(\mathcal{P}'(z))^2 = 4\mathcal{P}^3(z) - g_2\mathcal{P}(z) - g_3 \tag{1.8}$$

*derivando (1.8). Se obtiene*

$$\mathcal{P}''(z) = 6\mathcal{P}^2(z) - \frac{g_2}{2}$$

## 1.4. Las Funciones $\xi$ y $\nabla$ de Weierstrass

**La Función $\xi(z)$**

**Definición 1.7** *La función $\xi(z)$ definida por las siguientes condiciones*

1. $\dfrac{\partial}{\partial z}[\xi(z)] = -P(z)$

2. $\underset{Z \longrightarrow 0}{Lim}\left[\xi(z) - \dfrac{1}{z}\right] = 0.$ *Esta dada por*

$$\xi(z) = \frac{1}{z} + \sum_{w \in \wedge}{}' \left[\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2}\right]$$

*La función $\xi(z)$ es meromorfa, impar no eliptica con polos de orden 1(simple)*

**La Función $\nabla(z)$**

**Definición 1.8** *La función $\nabla(z)$ definida por las siguientes condiciones*

1. $\dfrac{d}{dz} Ln\nabla(z) = \dfrac{\nabla'(z)}{\nabla(z)} = \xi(z)$

2. $\underset{z \rightarrow 0}{Lim} \frac{\nabla(z)}{z} = 1.$ *Esta dada por:*

$$\nabla(z) = z \prod \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}}$$

*La función $\nabla(z)$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}$, impar con ceros simples.*

# Capítulo 2

# Teorema de la Adición para la función $\mathcal{P}-$Weierstrass

## 2.1. Relación Fundamental de la función Elíptica en términos de la función $\nabla(z)$

**Teorema 2.1** *Si $f$ es una función elíptica de orden $n$. Entonces:*

$$f_{(z)} = \frac{C \quad \nabla(z-\alpha_1)\,\nabla(z-\alpha_2)\,\nabla(z-\alpha_3)\ldots\nabla(z-\alpha_n)}{\nabla(z-\beta_1)\,\nabla(z-\beta_2)\,\nabla(z-\beta_3)\ldots\quad\nabla(z-\beta_n)}$$

*Donde $c$ es un constante, $c \in \mathbb{C}$.*

$\alpha_1, ..., \alpha_n$ *Ceros de* $f(z)$

$\beta_1, ..., \beta_n$ *Polos de* $f(z)$ *y*

$\alpha_1 + ... + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$

**Demostración:** Ver [2]; página 378.

■

## 2.2. Relación de la función $\mathcal{P}-$Weierstrass en términos de la función $\nabla(z)$

**Teorema 2.2** *Consideremos la función* $\mathcal{P}-weierstrass$*, entonces:*

$$P(z)-P(y)=-\frac{\nabla(z+y)\,\nabla(z-y)}{\nabla^2(z)\,\nabla^2(y)}$$

donde $y$ es un número complejo no periódico de $P(z)$.

**Demostración:**

Sea

$$F(z)=P(z)-P(z)$$

1. $F(z)$ es una función elíptica

2. $F(z)$ tiene a 0, como polo de multiplicidad dos

Por el teorema 1.5 $F(z)$ tiene dos ceros los cuales sean $y$, $-y$, debido al teorema 2.1

$$F(z)=\frac{C\nabla(z-y)\,\nabla(z+y)}{\nabla(z-0)\nabla(z-0)} \tag{2.1}$$

multiplicando la ecuación (2.1) por $z^2$

$$z^2P(z)-z^2P(y)=\frac{C\nabla(z-y)\nabla(z+y)}{\left[\dfrac{\nabla(z)}{z}\right]^2}$$

Por el Lema 1.11 (serie de *Laurent* de $\mathcal{P}(z)$ entorno al origen)

$$P(z)=\frac{1}{z^2}+C_2z^2+\cdots+C_{2m}z^{2m}+\cdots$$

tomando limite $z \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{C\nabla(-y)\nabla(y)}{\left[\underset{z\longrightarrow 0}{Lim}\frac{\nabla(z)}{Z}\right]^2} \\ 1 &= \frac{C\nabla\left(-y\right)\nabla(y)}{1} \end{aligned}$$

Y como $\nabla\left(z\right)$ es impar entonces $\dfrac{-1}{\nabla^2\left(y\right)} = C$.

Reemplazando en la ecuación (2.1) se obtiene:

$$P\left(z\right) - P\left(y\right) = -\frac{\nabla\left(z-y\right)\nabla(z+y)}{\nabla^2\left(z\right)\nabla^2\left(y\right)}$$

## 2.3. Teorema de la Adición para la Función $\mathcal{P}-$Weierstrass

**Teorema 2.3** *La función $P - weierstrass$ establece la siguiente relación algebraica.*

$$P\left(z+y\right) + P\left(z\right) + P\left(y\right) = \frac{1}{4}\left\{\frac{P'\left(z\right) - P'\left(y\right)}{P\left(z\right) - P\left(y\right)}\right\}^2$$

*donde $y$ es un número complejo no periódico en $P\left(z\right)$.*

**Demostración:**

Por el teorema 2.2

$$P\left(z\right) - P\left(y\right) = -\frac{\nabla\left(z+y\right)\nabla\left(z-y\right)}{\nabla^2\left(z\right)\nabla^2\left(y\right)}$$

tomando Logaritmo:

$$\begin{aligned}
Ln(P(z)-P(y)) &= Ln\left(\frac{\nabla(z+y)\nabla(z-y)}{\nabla^2(z)\nabla^2(y)}\right)\\
Ln(P(z)-P(y)) &= Ln\left(\nabla(z+y)\nabla(z-y)\right)-Ln\left(\nabla^2(z)\nabla^2(y)\right)\\
Ln(P(z)-P(y)) &= Ln\nabla(z+y)+ln\nabla(z-y)-Ln\left(\nabla^2(z)\nabla^2(y)\right)
\end{aligned}$$

Derivando con respecto a $z$:

$$\begin{aligned}
\frac{[P(z)-P(y)]'}{P(z)-P(y)} &= \frac{\nabla'(z+y)}{\nabla(z+y)}+\frac{\nabla'(z-y)}{\nabla(z-y)}-\frac{\left(\nabla^2(z)\nabla^2(y)\right)'}{\nabla^2(z)\nabla^2(y)}\\
\frac{[P(z)-P(y)]'}{P(z)-P(y)} &= \frac{\nabla'(z+y)}{\nabla(z+y)}+\frac{\nabla'(z-y)}{\nabla(z-y)}-\frac{\left(\nabla^2(z)\right)'\nabla^2(y)}{\nabla^2(z)\nabla^2(y)}\\
\frac{[P(z)-P(y)]'}{P(z)-P(y)} &= \frac{\nabla'(z+y)}{\nabla(z+y)}+\frac{\nabla'(z-y)}{\nabla(z-y)}-\frac{2\nabla(z)\nabla'(z)\nabla^2(y)}{\nabla^2(z)\nabla^2(y)}\\
\frac{P'(z)}{P(z)-P(y)} &= \frac{\nabla'(z+y)}{\nabla(z+y)}+\frac{\nabla'(z-y)}{\nabla(z-y)}-\frac{2\nabla'(z)}{\nabla(z)}\\
\frac{P'(z)}{P(z)-P(y)} &= \xi(z+y)+\xi(z-y)-2\xi(z)
\end{aligned}$$

de forma similar derivando con respecto a $y$, tenemos:

$$\frac{-P'(z)}{P(z)-P(y)}=\xi(x+y)-\xi(x-y)-2\xi(y) \tag{2.1}$$

Sumando las ecuaciones (2.2) y (2.3)

$$\begin{aligned}
\frac{P'(z)-P'(y)}{P(z)-P(y)} &= 2\xi(z+y)-2\left[\xi(z)+\xi(y)\right]\\
\frac{P'(z)-P'(y)}{2(P(z)-P(y))} &= \xi(z+y)-\left[\xi(z)+\xi(y)\right]
\end{aligned}$$

Derivando con respecto a $z$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P'(z)-P'(y)}{P(z)-P(y)}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\xi(z+y)-\frac{\partial}{\partial z}\xi(z)-\frac{\partial}{\partial z}\xi(y)\\
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P'(z)-P'(y)}{P(z)-P(y)}\right) &= -P(z+y)+P(z)\\
P(z+y) &= P(z)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P'(z)-P'(y)}{P(z)-P(y)}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(z+y) &= P(z)-\frac{1}{2}\left\{\frac{[P'(z)-P'(y)]'(P(z)-P(y))-[P(z)-P(y)]'(P'(z)-P'(y)}{[P(z)-P(y)]^2}\right\}\\
P(z+y) &= P(z)-\frac{1}{2}\left\{\frac{P''(z)}{P(z)-P(y)}-\frac{P'(z)(P'(z)-P'(y))}{[P(z)-P(y)]^2}\right\} \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

intercambiando $z$ por $y$ en la ecuación 2.4

$$P(y+z)=P(y)-\frac{1}{2}\left\{\frac{P''(y)}{P(y)-P(z)}-\frac{P'(y)(P'(y)-P'(z))}{[P(y)-P(z)]^2}\right\}$$

Sumando las ecuaciones (2.4) y (2.5)

$$2P(z+y)=P(z)+P(y)-\frac{1}{2}\{\frac{P''(z)-P''(z)}{P(z)-P(y)}\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{P'(z)-P'(y)}{P(z)-P(y)}\right\}^2$$

debido a la observación 1.5 tenemos que

$$P''(z)=6P^2(z)-\frac{g_2}{2}$$

Reemplazando en la ecuación (2.6)

$$\begin{aligned}
2P(z+y) &= P(z)+P(y)-\frac{1}{2}\left\{\frac{6(P(z)+P(y))(P(z)-P(y))}{P(z)-P(y)}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{P'(z)-P'(y)}{P(z)-P(y)}\right\}^2\\
2P(z+y) &= -2P(z)-2P(y)+\frac{1}{2}\left\{\frac{P'(z)-P'(y)}{P(z)-P(y)}\right\}^2
\end{aligned}$$

finalmente

$$P\left(z+y\right)+P\left(z\right)+P\left(y\right)=\frac{1}{4}\left\{\frac{P'\left(z\right)-P'\left(y\right)}{P\left(z\right)-P\left(y\right)}\right\}^{2}$$

■

# Bibliografía

[1] A. I. Markushevich; Theopy of Functions of Complex Variable; Prentice-Hall; Vol III; 1965

[2] Sansone G. Gerretsen J. Lectures on the Theory of functions a in complex Variable. P. Noordhotf. Vol II, 1969.

[3] A. Lins Neto Funções de una Variáble Complexa; Projeto Euclides; IMPA; Rio de Janeiro; 1993

[4] .L.V. Alfors; Complex Analysis; McGraw-Hill; Kogakusha; internationatol student Editions 1979

[5] T. M. Apostol. J. W. Brewn; C. Modular Functions and Dirichlet Series in Number theory; Springer - Verlang 1976.